

АЛЬТЕРНАТИВНАЯ МЕТОДИКА РАБОТЫ С НОТНЫМ ТЕКСТОМ ПРИ ПОМОЩИ ОПЕРАЦИЙ СИММЕТРИИ

Ю. А. Бражникова

*МБУ ДО «Детская школа искусств г. Нерюнгри», г. Нерюнгри, Россия,
iuna7@mail.ru*

Введение: в статье излагается новый методологический подход к изучению музыкального текста с помощью операций симметрии, который позволяет достичь максимально абстрагированного уровня представления музыкального сочинения и приблизить его к математическому моделированию.

Материалы и методы: в работе представлена технология построения математической модели нотного текста любой сложности на основе преобразований симметрии. Методология исследования базируется на практическом приеме раздельного рассмотрения звуковой и ритмической последовательностей.

Результаты исследования: используемые формулы и математические символы позволяют включать нотный материал в различные информационные системы, отражающие в математической форме важные свойства музыкального сочинения или его фрагмента как систему симметрических соотношений. Исследование этих соотношений средствами математики помимо педагогической ценности должно ответить на поставленные вопросы о свойствах некоторой совокупности звуковысотных соотношений музыкального произведения. В статье осуществляется описание операций симметрии (трансляция, зеркальное отражение и трансляционно-зеркальное преобразование). Работа затрагивает два вида симметричного равенства: классическую симметрию и симметрию подобия. Первая применяется по отношению к звукоцепочке (последовательности звуков, отделенной от ритма) и ритму, которые располагаются в реальном времени. Вторая рассматривает абстрактную гармоническую последовательность звуков и ритмодолей.

Обсуждение и заключения: помимо расширения вузовских дисциплин «Теория музыки» и «Сольфеджио» в рамках специальности «Музыкальное образование» использование категорий симметрии в музыке помогает значительно обогатить возможности симметрологии, которая в настоящее время считается одной из фундаментальных отраслей знания. В целом применение симметричных стандартов в музыке может стать базой для новых направлений в различных областях музыкальной науки и использоваться в качестве эффективного методологического инструмента, предполагающего возможности его многоуровневого использования в процессе работы над произведениями различных стилей.

Ключевые слова: музыка и математика; математическая модель в музыке; симметрия в музыке; теория музыки; сольфеджио; мелодия; варьирование; транспозиция; ракоход

Для цитирования: Бражникова Ю. А. Альтернативная методика работы с нотным текстом при помощи операций симметрии // Интеграция образования. 2016. Т. 20, № 4. С. 507–521. DOI: 10.15507/1991-9468.085.020.201604.507-521

INNOVATIVE TECHNIQUE OF WORKING WITH MUSIC TEXT BY SYMMETRY OPERATIONS

Yu. A. Brazhnikova

*Children's Art School Neryungry, Neryungry, Russia,
iuna7@mail.ru*

Introduction: the article presents a new methodological approach to the study of the musical text using symmetry operations, which allows to achieve the highest level abstracted representations of musical works and bring it closer to mathematical modeling. This technique is particularly relevant when teaching students without musical training and do not know the music reading.



Materials and Methods: the work presents the technology of constructing a mathematical model of the musical text of any complexity on the basis of symmetry transformations. The research methodology is based on the practical consideration of the separate reception of sound and rhythmic sequences. Replacing the research object – a piece of music – a mathematical model has allowed to come to a very formalized notion of simple and complex musical processes and easily change their parameters during the simulation.

Results: used formulas and symbols allow you to include music notation material in various information systems, reflecting in mathematical form the most important properties of a musical composition, or fragment thereof, as a system of symmetric relations. The study of these relations means of mathematics, in addition to the pedagogical value, should answer these questions about the properties of a certain set of pitch of a musical work relations. The article carried the description of the symmetry operations (broadcast, mirroring and translation-mirror transformation). The work involves two types of symmetric equality: classical symmetry and similarity symmetry. The first applies to *zvukotsepochnke* (sequence of sounds separated from rhythm) and rhythm, which are located in real time. The second considers the harmonic sequence of sounds and *ritmodoley* is temporal factor.

Discussion and Conclusions: in addition to the expansion of university disciplines “theory of music” and “ear training” in the specialty “Music education”, the use of categories of symmetry in music helps to significantly enrich the possibilities *simmetrologii*, which is now considered one of the fundamental branches of knowledge. In general, the use of balanced standards in music can become the basis for new directions in various areas of science and music used as an effective methodological tool, suggesting the possibility of its use in a multilevel process of working on the works of various styles. It should be noted that overseas the problem of musical symmetry is investigated with the 70-ies of the last century. In Russia and in the CIS countries, it began to be considered a little later and has not yet become widespread, despite the undeniable practical value. This issue can also be considered as part of informatization of education and better integration of music theory with the exact sciences.

Keywords: music and mathematics; mathematical model in music; symmetry in music; music theory; ear training; melody; variation; transposition; retrograde

For citation: Brazhnikova YuA. Innovative technique of working with music text by symmetry operations. *Integratsiya obrazovaniya* = Integration of Education. 2016; 4(20):507-521. DOI: 10.15507/1991-9468.085.020.201604.507-521

Введение

В процессе выявления параллелей между художественным и научным познанием преподавание специальности «Музыкальное образование» в педагогических вузах нуждается в переориентировке существующих приоритетов [1–3]. Одной из первоочередных задач для нее должен стать поиск теоретических принципов, включенных в систему координат не только музыкального искусства, но и других областей знания [4–6]. Особую остроту эти вопросы приобрели в последние десятилетия, когда разнообразие эстетических платформ требует от исследователей создания научного аппарата, способного свести воедино разнообразные формы преподавания музыки, сложившиеся на всем протяжении истории музыкальной педагогики. Музыкальному образованию необходимо овладение синтаксисом иного типа, способным интерпретировать эстетические аспекты с помощью формализованных общенаучных методов [7–10], поскольку когнитивная система, базирующаяся на

музыкально-теоретических категориях, возникших еще в середине XIX в., не всегда в состоянии удовлетворить современным требованиям. Подобная методика должна иметь широкий ракурс применения как при обращении к наследию традиционных культур, так и при освещении проблем современной музыки, где обычные способы изучения часто оказываются недостаточными [11–14]. В таком контексте предлагаемый в данной статье методологический подход к освоению музыкального текста с помощью операций симметрии может расширить и обогатить сложившиеся методы и способы изучения музыкальной культуры.

Универсальность принципов симметрии может оказаться тем импульсом, который поможет пересмотреть многие базисные положения в вузовской методике преподавания музыки. Зародившись в недрах кристаллографии, симметрология как самостоятельная наука сформировалась сравнительно недавно, в середине 1960-х гг. С того времени ее концептуальные модули

с большим успехом применяются в самых различных отраслях, на материале таких дисциплин как математика, геометрия, физика, химия [15]. В современной науке симметричный метод рассматривается как основополагающий при выявлении структуры объектов живой и неживой природы, а также при определении логических категорий тождества и различия, инвариантности и изменения и др. Например, в философии понятие симметрии соотносится, в частности, с диалектическим законом единства и борьбы противоположностей. В искусствоведении математическая конкретизация типов симметричных преобразований коснулась изобразительного искусства, в основном его декоративно-прикладных видов (орнаменталистика)¹, а также отчасти стихосложения [16].

Обзор литературы

Методика применения симметричных преобразований, в том числе в процессе обучения студентов специальности «Музыкальное образование», достаточно подробно рассматривается в профессиональных разработках многих исследователей в России и странах СНГ, охватывая прежде всего философско-эстетический аспект проблемы. Так, в диссертационной работе А. Л. Абрамяна симметрия представлена в качестве своеобразного «моста» между теорией музыки и эстетикой². Психологические и мировоззренческие предпосылки возникновения симметричных отношений в ракурсе художественной концепции обратимости подробно анализируются в работе С. С. Гончаренко³.

Симметричный анализ целостных музыкальных систем также не остался вне зоны внимания музыковедения. Их исследование в разрезе исторической эволюции производится В. А. Белоусовой⁴, констатирующей наличие принципов переносной и зеркальной симметрии в строении звукорядов и аккордов. Отдельные музыкально-теоретические формации (натуральный звукоряд, античные лады, диатоника, пентатоника, авторские ладо-гармонические системы) рассматривались Л. В. Александровой⁵, Б. И. Каракуловым⁶, И. Н. Барановой⁷, В. Н. Марутаевым⁸ с точки зрения реализации в них научных постулатов порядка и симметрии.

В европейской и американской музыковедческой литературе научное освоение музыкально-симметрологической проблематики было предпринято еще в 1970-х гг. В ряде трудов, посвященных данной теме, интерес представляет диссертационное исследование Л. Дж. Солломона⁹, в котором рассматриваются различные роды симметричных фигур в их соотносительности с музыкально-смысловыми единицами. Такой способ сопряжения оказывается особенно востребованным при обучении студентов музыкальной грамоте.

Математический подход к музыкальной теории, использующий симметричную методологию, в настоящее время является очень популярным в музыковедении США и Западной Европы и включает широчайший спектр затрагиваемых вопросов – от фундаментальных разработок и серьезных научных статей [17–20] до попыток сочинения музыкальных пьес

¹ Шубников А. В. Законы симметрии и их применение в науке, технике и прикладном искусстве. М.-Л. : Изд-во АН СССР, 1946. 176 с.; Шубников А. В. Избранные труды по кристаллографии. М. : Наука, 1975. 551 с.; Шубников А. В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. М. : Изд-во АН СССР, 1951. 172 с.

² Абрамян А. Л. Взаимодействие симметрии и асимметрии в музыке. Ереван, 1987. 21 с.

³ Гончаренко С. С. Зеркальная симметрия в музыке. Новосибирск, 1993. 234 с.

⁴ Белоусова В. Н. Симметрия в музыке (теоретический и исторический аспекты). М., 1995. 20 с.

⁵ Александрова Л. В. Порядок и симметрия в музыкальном искусстве: логико-исторический аспект. Новосибирск, 1995. 372 с.

⁶ Каракулов Б. И. Симметрия музыкальной системы. Алма-Ата, 1989. 130 с.

⁷ Баранова И. Н. Симметрия музыкальной структуры (на материале советской музыки) : дис. ... канд. иск. Л., 1985. 166 с.

⁸ Марутаев В. Н. Приблизительная симметрия в музыке // Проблемы музыкальной науки. Вып. 4. М. : Сов. композитор, 1979. С. 306–348.

⁹ Solomon L. J. Symmetry as a Compositional Determinant. New York, 1973. 166 p.



на основе операций симметрии [21] и «игровых» композиционных построений¹⁰. За последние годы опубликовано множество работ англоязычных авторов, так или иначе затрагивающих вопросы музыкальной симметрии¹¹ [22–24]. Наиболее серьезным и интересным трудом является монография американских авторов Д. Дж. Хантера и Х. Т. Хиппеля о симметричных структурах в 12-тоновых сериях [25]. Работа снабжена множеством схем и математических формул и использует принципы теории групп для обоснования реализации симметричных фигур в музыке композиторов нововенской школы.

Материалы и методы

Основное отличие предлагаемого метода симметричных преобразований от обычных приемов изучения музыкального текста заключается в том, что принятое в музыковедении определение каких-либо преобразований предусматривает изменение *неделимой* мелодии; все операции совершались над целостными мелодическими фигурами. В данной работе для обнаружения всех теоретически возможных симметрических изменений музыкальной структуры используется *искусственное расщепление* мелодической линии на составляющие абстрактные подструктуры¹².

Целью подобного подхода является отход от привязки к нотному тексту и выяснение механизмов организации мелодии при помощи симметричных преобразований.

На схеме 1 графически показаны два этапа искусственного абстрагированного расщепления мелодической фразы. Звуковые последовательности обозначены традиционным буквенным способом. Ритмические отношения для удобства совершения операций симметрии выражены в числовых эквивалентах. Восьмая длительность обозначена цифрой «1», четвертная – цифрой «2», половинная – цифрой «4» и т. д.

На первом этапе абстрагирования получают относительно самостоятельные *звукоцепочка и ритм*¹³. Их раздельное рассмотрение оправдывается тем, что каждая из подсистем размещения на линейной временной шкале может сохранять свою структуру при всех теоретически возможных изменениях элементов другой подсистемы. Так, при изменении высоты звука какой-либо мелодической фигуры (мелофигуры) ритм вполне может показать одну и ту же последовательность долей. Точно так же любые изменения ритма могут совершаться при сохранении неизменной структуры звукоцепочки.

	Звукоцепочка /	Звукоряд /
	Sound chain	Sound scale
	e f g	g f e
	Ритмоцепочка /	Ритморяд /
Rhythmical chain	Rhythmical scale	
1 1 2	2 1 1	

С х е м а 1. Абстрагированное расщепление мелодии

S c h e m e 1. Precinded splitting of melody

¹⁰ Vi Hart. Symmetry and Transformations in the Musical Plane. 2009. URL: <http://vihart.com>

¹¹ Conway J. H. Burgiel H., Goodman-Strauss Ch. The Symmetry of Things. New York : A K Peters/ CRC Press, 2008. 441 p.

¹² Этот метод был впервые предложен профессором Казахской национальной консерватории им. Курмангазы, д. иск. Б. И. Каракуловым.

¹³ Для наглядного изложения материала буквенные обозначения звукорядов располагаются в горизонтальном порядке, аккордов – в вертикальном.

Внешнее различие звукоцепочки и ритма заключается в том, что звукоцепочка в реальной мелодии не существует без ритма, а ритм без звукоцепочки существовать может (например, ритмическая последовательность, исполняемая на ударных инструментах, не имеющих фиксированной высоты строя). Поэтому звукоцепочка является абстрактным понятием, а ритм – реальным.

На следующем этапе абстрагирования звуковая и ритмическая последовательности превращаются в *звукоряд* и *ритморяд*, которые также обладают относительной самостоятельностью и могут изучаться раздельно. Звукорядом является последовательность звуков определенной мелодии, расположенная по высоте. Ритморяд представляет собой совокупность ритмических длительностей мелодии, расположенных по порядку.

Из всех многочисленных видов симметрии в данном исследовании используются только: а) операции классической симметрии, т. е. такие, при которых исходная фигура не изменяет своих масштабов; б) операции симметрии подобия, когда масштабы исходного объекта уменьшаются или увеличиваются при сохранении его формы. Классическая симметрия реализуется в менее абстрактных сущностях – звукоцепочках и ритмических последовательностях, существующих во времени. Симметрия подобия наблюдается в крайне абстрактных сущностях – звукорядах и ритморядах вне временного параметра.

По отношению к этим операциям можно применить три рода равенства:

1) трансляционное, когда два объекта совмещаются друг с другом при переносе на заданное расстояние;

2) зеркальное, когда два объекта совмещаются при отражении в зеркале;

3) трансляционно-зеркальное, являющееся тождеством или синтезом двух предыдущих.

Результаты исследования

Алгоритм применения метода симметричных преобразований на уроках

музыки заключается в последовательном применении каждой операции по отношению к звуковой последовательности и ритму. Несмотря на кажущуюся сложность симметричные модификации легко могут быть использованы студентами и способствуют быстрому усвоению не только нотной грамоты, но и пониманию особенностей строения мелодии.

Ниже дается описание всех возможных преобразований симметрии в звуковой последовательности и ритме.

Преобразования классической симметрии в музыке характеризуются сохранением размеров исходной мелодии или ее подсистем. При данной операции музыкальное время представлено в виде шкалы, вдоль которой над звукоцепочками и ритмами совершаются изменения. В данном случае эта временная шкала будет являться осью симметрии.

1. *Операция трансляции классической симметрии*, обозначаемая символом t , возникает, когда части звукоцепочки / ритма или вся звукоцепочка / ритм целиком могут быть перенесены по оси однонаправленного времени без изменений состава, длины и последовательности их элементов. В качестве единицы измерения расстояния трансляции может быть взят любой временной отрезок: одна или несколько звукодолей, один или несколько тактов и т. д. Расстояние трансляции обозначается индексом возле символа t , исходный объект – буквой E . Для удобства величина трансляции выражается не в количестве ступеней, как в классическом учении гармонии, а в количестве полутоновых шагов, как это принято в полифонии, например:

$$d - g (d-dis, dis-e, e-f, f-fis, fis-g) = 5.$$

Все возможные варианты преобразования звукоцепочки и ритма с помощью операций классической симметрии указаны на схеме 2:

В схеме 2а звукоцепочка $e f g^{14}$ переносится на один такт по временной шкале. В результате переноса возникает

¹⁴ Буквенные обозначения звукорядов и ритморядов (в отличие от звукоцепочек и ритма) записываются через дефис, а интервальное строение – со знаком +.



звукоцепочка $efg\ efg$, обе части которой могут быть совмещены друг с другом при помощи операции классической трансляции на расстояние t_1 . В схеме 2б абстрактный ритм $1\ 1\ 2$ также переносится на один такт по шкале времени, в результате чего образуется ритмическая последовательность $1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2$, обе части которой взаимно обмениваются при помощи операции классической трансляции на расстояние t_1 . Формула симметричного преобразования – $\{E; t_1\}$.

Трансляционная классическая симметрия широко распространена в различных видах изобразительного искусства – архитектуре, живописи, прикладных искусствах – и в основном используется при создании орнаментов. Этот вид симметричных преобразований известен в музыковедении в виде точного повтора (репризы). Однако он не предполагал возможности отдельного рассмотрения и преобразования звуковой и ритмической последовательностей. При данной операции в зависимости от расстояния переноса могут использоваться различные отрезки шкалы времени, находящиеся на различном расстоянии друг от друга.

2. *Классическое преобразование зеркального отражения*, обозначаемое символом m , совершается при помощи особой плоскости зеркального отражения, которая находится точно посередине между вступающими во взаимоотноение фигурами. Эта плоскость остается неизменной при изменениях исходной фигуры. Она может находиться в любом отрезке временной шкалы и обозначается индексом возле символа m .

В схеме 2в звукоцепочка efg отражается в плоскости, расположенной между первым и вторым тактами, образуя звукоцепочку $efg\ gfe$, первая часть которой («прямая») взаимно обменивается со вто-

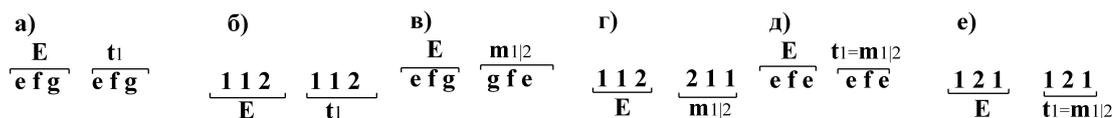
рой («перевернутой») с помощью операции классического зеркального отражения $m_{1|2}$.

В схеме 2г абстрактный ритм $1\ 1\ 2$ отражается в плоскости, расположенной между первым и вторым тактами, в результате чего образуется ритмическая последовательность $1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1$, первая часть которой («прямая») взаимно обменивается со второй («перевернутой») с помощью операции классического зеркального отражения $m_{1|2}$. Операция выражается формулой $\{E; m_{1|2}\}$. Подобная операция известна в музыкальной науке под названием ракохода. При этом музыкальное время теряет свою векторную направленность «от прошлого к будущему», показывая возможность обратимости заданного отрезка, в зависимости от выбранной особой плоскости зеркального отражения.

3. *Классическое трансляционно-зеркальное преобразование*, обозначаемое символом $t = m$, представляет собой тождество двух предыдущих.

В схеме 2д звукоцепочка efe отражается в плоскости, расположенной между первым и вторым тактами, и одновременно переносится по шкале времени на расстояние одного такта, образуя звукоцепочку $efe\ efe$, первая часть которой взаимно обменивается со второй с помощью классической трансляционно-зеркальной операции $t_1 = m_{1|2}$.

В схеме 2е абстрактный ритм $1\ 2\ 1$ отражается в плоскости, расположенной между первым и вторым тактами, и одновременно переносится по шкале времени на расстояние одного такта, в результате чего образуется ритмическая последовательность $1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1$, первая часть которой взаимно обменивается со второй с помощью классической трансляционно-зеркальной операции $t_1 = m_{1|2}$. Формула операции – $\{E; t_1 = m_{1|2}\}$.

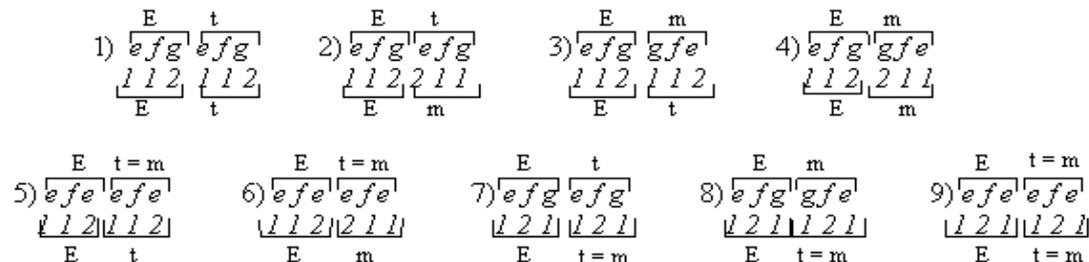


С х е м а 2. Преобразования звукоцепочки и ритма с помощью операций классической симметрии

S c h e m e 2. Transformation of the sound chain and rhythm by classical symmetry operations



Две подсистемы мелодии, видоизменяясь с помощью операций t , m и $t = m$, образуют девять видов мелодических фигур (схема 3):



С х е м а 3. Девять видов мелодических фигур, образованных с помощью операций классической симметрии

S c h e m e 3. Nine types of melodic figures formed by classical symmetry operations

Преобразования симметрии подобия. В повседневной жизни человек часто наблюдает изменение масштабов окружающих его предметов при сохранении формы. В музыке симметрия подобия легко обнаруживается в ритмической организации, когда происходит увеличение или уменьшение определенной ритмической последовательности при сохранении ритмической структуры.

В звуковысотной сфере симметрия подобия фиксируется в октавных отношениях между отдельными звуками и их комплексами. Неоктавные отношения между интервалами, аккордами (например, квинтовые, большесекундовые, терцовые и т. д.), находящиеся на разных высотах, но обладающие одинаковой структурой, музыковеды к симметрично-подобным не относят. Между тем, если при сопоставлении звукокомплексов обратить внимание на длины звучащих струн, то становится очевидным, что любое перемещение по звукошкале, включая и октавное, любых звуковысотных комплексов (интервалов, трезвучий, звукорядов) подчиняется симметрично-подобным закономерностям, поскольку форма звукокомплекса (интервальный состав) сохраняется при изменении его масштабов (длин звучащих струн, т. е. высоты).

Как уже было сказано, операции симметрии подобия в музыке стали возможны только при новой трактовке временного параметра. Звуки и ритмодлительности избранной мелофигуры, модифицируемой таким образом, «собираются» по вертикали без учета их расположения на шкале времени, которая при этом не исчезает, как это кажется на первый взгляд, а как бы «стягивается» в вертикальную линию. Тот же эффект наблюдается на фортепиано при использовании педали, когда звуки гармонической фигурации объединяются в один аккорд.

1. *Трансляционное равенство симметрии подобия* в музыке, обозначаемое символом T , показывают два звукокомплекса различной высоты, но одного и того же интервального строения, и поэтому их встречный перенос по звукошкале на величину расстояния между ними приводит к тем же звукокомплексам. В ритмической организации трансляционная симметрия подобия обнаруживается, когда происходит двойное, тройное и т. д. увеличение или уменьшение определенной ритмической фигуры при сохранении ее структуры.

В схеме 4а звукоряд $e-f-g$, имеющий интервальное строение $2+1$, переносится на кварту вверх по звукошкале. В результате переноса возникает звукоряд $a-b-c$ с тождественным интерваль-



ным строением $2+1$, но длины его струн уменьшены по сравнению с первым на $\frac{3}{4}$. В темперированном строе это соотношение будет равно $\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$. Поскольку операция самосовмещения звукорядов сопровождается изменением их масштабов (длины струн верхнего звукоряда увеличиваются на $\frac{3}{4}$ при переходе в нижнюю, а длины струн нижнего звуко-

ряда уменьшаются на $\frac{3}{4}$ при переходе в верхнюю), то данное изменение является операцией симметрии подобия. Структура всей симметричной фигуры $e-f-g-a-b-c$ определяется как трансляция в кварту, т. е. величина трансляции равна 5. Обозначим ее как T_5 . Операция выражается формулой $\{E; T_5\}$.

На схеме 4 показаны операции симметрии подобия, производимые над звукорядами и ритморядами:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{а)} & \text{б)} & \text{в)} & \text{г)} & \text{д)} & \text{е)} \\
 T_5 \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} & T_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} & M_g^a \begin{bmatrix} c \\ h \\ a \end{bmatrix} & M_{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & T_6 = M_g^a \begin{bmatrix} c \\ h \\ b \end{bmatrix} & T_{\frac{1}{4}} = M_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} \\
 E \begin{bmatrix} g \\ f \\ e \end{bmatrix} & E \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & E \begin{bmatrix} g \\ f \\ e \end{bmatrix} & E \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & E \begin{bmatrix} ges \\ f \\ e \end{bmatrix} & E \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

С х е м а 4. Преобразования звукоцепочки и ритма с помощью операций симметрии подобия

S c h e m e 4. Transformation of the sound chain and rhythm by similarity symmetry operations

В схеме 4б ритморяд, имеющий строение $1-1-2$, переносится по ритмошкале, увеличиваясь в два раза, и переходит в ритморяд $2-4$. Обе части образующегося при этом ритморяда $1-1-2-2-2-4$ взаимозаменяются при помощи операции трансляции симметрии подобия T_2 .

Трансляция симметрии подобия соотносится с известным в классическом музыковедении понятием транспозиции. Однако этот термин не всегда предполагает точное сохранение интервального состава транспонируемой фигуры, что является необходимым условием для операции симметрии. Кроме того, выявление симметричных закономерностей, возникающих при переносе звукокомплекса вверх или вниз по звукошкале, предполагает одновременное раскрытие физических свойств и акустических параметров, соответствующих этому преобразованию.

Понятия ритмического уменьшения и увеличения использовались до сих пор в музыкальной науке без определения данной операции как преобразования симметрии подобия. Введение же параметра ритморяда позволяет предста-

вить его как последовательность математической прогрессии, что позволит производить ритмические изменения с использованием математических методов построения фигур.

2. *Зеркальное равенство симметрии подобия*, обозначаемое символом M , ранее использовалось в связи с различной проблематикой изучения звуковысотной организации, в частности, при исследовании строения мажора и минора. Если применить законы зеркальной симметрии подобия к звуко- и ритморядам, то при зеркальном равенстве части фигуры взаимнообмениваются через операцию зеркального отражения в особой точке, которая сохраняется неподвижной при изменениях. Эта особая точка может как совпадать со звуком или ритмической длительностью, так и находиться между ними, что на приведенных ниже схемах обозначается горизонтальной чертой. При этом интервальное строение исходного звукоряда / ритморяда меняется на противоположное.

На схеме 4в «прямой» звукоряд $e-f-g$, имеющий интервальное строение $2+1$,



отражается в особой точке, находящейся между звуками a и g . В результате переноса возникает звукоряд $a-h-c$ с «перевернутым» интервальным строением $1+2$. Структура всей симметричной фигуры $e-f-g-a-h-c$ определяется как зеркальное отражение $M \frac{a}{g}$.

В схеме 4г «прямой» ритморяда $1-1-2$, зеркально отражаясь в точке $\frac{1}{2}$, переходит в «перевернутый» ритморяда $1-2-2$. В результате образуется ритморяда $1-1-2-1-2-2$, структура которого обозначается символом $M \frac{1}{2}$. Формула преобразования – $\{E; M \frac{1}{2}\}$.

Симметрично-подобное зеркальное преобразование звукоряда известно в музыковедении под названием инверсии. Однако применение в данном случае закономерностей симметричных операций в качестве методологического инструмента позволяет обнаружить принципиально новые конструктивные качества в гармонических структурах.

В качестве особой точки могут выступать все звуки хроматического звукоряда, которые из одной исходной «прямой» фигуры строят множество «перевернутых» фигур одного и того же строения на разных высотах, а двенадцать промежутков между ними строят другое множество «перевернутых» фигур на других высотах. Возможности создания множества звуковысотных фигур из одной исходной при помощи операции зеркального отражения симметрии подобия на практике потенциально бесконечны. Однако они ограничиваются из-за октавной периодичности двенадцатью фигурами, которые повторяются в каждой октаве.

Понятие зеркального равенства симметрии подобия по отношению к ритморяду применялось редко, в основном в серийной технике. Тем не менее фигура из ритмодлительностей также может быть повернута на 180° в особой точке зеркального отражения, благодаря чему получится ритморяда с зеркально-симметричным строением.

Аналогично особой точке зеркального отражения для звукоряда особая точка зеркального отражения в ритморяде может как совпадать с одной из ритмодолей, так и находиться между двумя звукодолями. Теоретически особых точек может быть бесконечное множество, но практически их число невелико из-за ограниченного применения ритмодлительностей в музыке. Так, очень редко можно встретить ноты длительностью более, чем бревис, и короче, чем 128-я.

3. Трансляционно-зеркальное равенство симметрии подобия, обозначаемое $T = M$, возникает в том случае, если сопоставляемые звукокомплексы или ритморяды обладают зеркально-симметричным строением, и поэтому их отражение в особой точке приводит к тому же результату, что и трансляция.

На схеме 4д звукоряд $e-f-ges$, имеющий интервальное строение $1+1$, переносится на расстояние уменьшенной квинты вверх и вниз по звукошкале и одновременно отражается в особой точке, находящейся между звуками a и g . В результате переноса возникает звукоряд $b-h-c$ с аналогичным интервальным строением $1+1$. Структура всей симметричной фигуры $e-f-ges-a-b-c$ определяется символом $T_6 = M \frac{a}{g}$.

На схеме 4е ритморяда $2-4-8$, имеющий внутреннее зеркальное строение (соотношение $2:4$ равно соотношению $4:8$), переносится по ритмошкале, изменяясь в $\frac{1}{4}$ раза, и одновременно отражается в особой точке, совпадающей с ритмодлительностью 2. В результате образуется ритморяда $0,5-1-2$ с аналогичным соотношением длительностей ($0,5:1 = 1:2 = 2:4 = 4:8$), строение которого обозначается символом $T \frac{1}{4} = M_2$.

Преобразование соответствует формуле $\{E; T \frac{1}{4} = M_2\}$.

По аналогии с трансляционно-зеркальной операцией классической симметрии, операции трансляции и зеркального отражения симметрии



подобия используются по отношению к незеркальным звукорядам / ритморядам, т. е. таким, которые при отражении в зеркале преобразовываются в фигуры противоположного строения. Трансляционно-зеркальная операция, представляющая собой тождество трансляции и зеркального отражения, используется по отношению к зеркальным звукорядам / ритморядам, т. е. таким, которые при отражении в зеркале не изменяются.

Подсистемы мелодии могут подвергаться таким изменениям, которые являются **комбинированными операциями классической симметрии и симметрии подобия**. Модификации звукоцепочек и ритмов происходят в этих случаях одновременно и в пространстве, и во времени.

1. *Комбинированное преобразование двух трансляций ($t \times T$)¹⁵* является переносом во времени измененной по масштабам мелодии. По прямой времени подсистемы мелодии могут переноситься на разные расстояния, в пространстве они также могут транслироваться на различные величины. Поэтому конкретных реализаций этой комбинированной операции существует бесконечное множество.

2. *Комбинированное преобразование классической трансляции и зеркального отражения симметрии подобия ($t \times M$)* является переносом по времени зеркально отраженной в пространстве мелодии. Ее подсистемы транслируются во времени и зеркально отражаются в особой точке пространства.

3. *Комбинированное преобразование классического зеркального отражения и трансляции симметрии подобия ($m \times T$)* есть не что иное, как зеркальное отражение во времени измененной по масштабам мелодии. Эта операция сопровождается «переворотом» на шкале времени ее подсистем и, следовательно, последовательности их элементов, а также сохранением их внутренних пропорций при пространственных изменениях.

4. *Комбинированное преобразование двух зеркальных отражений ($m \times M$)* есть совмещение двух зеркальных отражений во времени и в пространстве. Для совмещения двух частей симметричной фигуры в данном случае необходим ракоход во времени зеркально отраженных в пространстве подсистем.

5. *Комбинированное преобразование трансляционно-зеркальной классической симметрии и трансляции симметрии подобия ($m = t \times T$)* представляет собой совмещение операции равенства перемещения и зеркального отражения фигуры, обладающей внутренней зеркальностью по временной шкале, а также ее трансляции в пространстве.

6. *Комбинированное преобразование трансляционно-зеркальной классической симметрии и зеркального отражения симметрии подобия ($t = m \times M$)* представляет собой совмещение операции равенства перемещения и зеркального отражения фигуры, обладающей внутренней зеркальностью по временной шкале, и ее отражения в пространственной плоскости.

7. *Комбинированное преобразование трансляционной классической симметрии и трансляционно-зеркальной симметрии подобия ($t \times T = M$)* является совмещением переноса исходной фигуры по шкале времени и равенства операций перемещения и зеркального отражения в пространстве. Исходная фигура или ее подсистемы должны при этом обладать зеркальным соотношением своих элементов.

8. *Комбинированное преобразование зеркальной классической симметрии и трансляционно-зеркальной симметрии подобия ($m \times T = M$)* является совмещением зеркального отражения исходной фигуры на шкале времени и равенства операций перемещения и зеркального отражения в пространстве. При этой операции для исходной фигуры или ее подсистем также является необходимым наличие зеркальности между элементами.

¹⁵ Знак умножения означает последовательное выполнение двух операций.

9. *Комбинированное преобразование двух трансляционно-зеркальных операций* ($t = t \times T = M$, или $t \times M = t \times T$) представляет собой совмещение операции равенства перемещения и зеркального отражения фигуры, обладающей внутренней зеркальностью по временной шкале, и равенства операций перемещения и зеркального отражения в пространстве. Для совершения данной операции исходная фигура или ее подсистемы должны обладать внутренней зеркальностью в расположении и соотношении элементов.

Обсуждение и заключения

1. Благодаря использованию категорий симметрии может быть выстроена особая идеальная конструкция, являющаяся содержательной моделью музыкального сочинения. Исследование демонстрирует оригинальные способы изучения музыкального материала, не включающие обращение к нотной грамоте, и обозначают сферу деятельности, представляющую несомненный интерес не только для преподавателей специальности «Музыкальное образование», но и для музыковедов, а также для представителей других отраслей наук [26].

2. Предлагаемый метод симметричного преобразования целостной неделимой мелодии и ее отдельных составляющих обладает высокой степенью вариативности. Это позволяет свободно применять его не только при изучении классических произведений, но и народной музыки, а также сочинений современных композиторов, что очень актуально при проведении занятий музыки со студентами указанной специальности.

3. «Игровой» характер мелодических модификаций с помощью операций симметрии дает возможность использовать их при изучении простых мелодий, в частности, детской музыки.

4. Всего имеется 9 различных видов комбинированных операций классической

симметрии и симметрии подобия, а вместе с 9 операциями классической симметрии и 6 операциями симметрии подобия их получается 24. При этом по отношению к звукоцепочке и ритму могут применяться различные виды операций. Расстояния трансляции, особые точки и плоскости зеркального отражения в двух подсистемах мелодии могут не совпадать, что увеличивает число возможных преобразований симметрии до бесконечности. Этот фактор позволяет использовать методику симметричных модификаций мелодии для объяснения студентам основ музыкальной композиции. Абстрагированный метод изложения музыкального материала, не связанный с нотным текстом, помогает студентам влиться в процесс освоения сложнейшего музыкального искусства.

5. Операции симметрии могут применяться как по отношению к достаточно протяженным мелодико-ритмическим последовательностям, так и по отношению к их частям – мотивам, фразам и даже отдельным звукам.

Поскольку в музыкальном искусстве не существует полностью завершенных формализованных теорий, создание содержательных моделей в нем резко усложняется [27]. Поэтому сущность симметрологических методов исследования, не связанная с традиционным описательным музыковедческим аппаратом, может стать основой для разработки подобных абстрактных моделей, представляющих собой идеальные объекты. Такая подача материала обеспечивает легкость его восприятия студентами наряду с обычным нотным текстом.

Таким образом, настоящую статью можно рассматривать как методическую разработку теоретической возможности применения симметричной методологии при изучении мелодии, когда принципы симметрии рассматриваются как способ реализации некоторых предпосылок, касающихся природы строения и восприятия музыкального искусства.

СПИСОК
ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Аухадеев А. Э.* Подготовка специалистов на основе современных представлений о самоорганизации сложных развивающихся систем // *Преподаватель XXI век.* 2016. Т. 1, № 1. С. 20–40. URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25730906> (дата обращения: 02.06.2016).
2. *Шакирова Л. Р., Фалилеева М. В.* Интеллектуальный вызов при обучении решению математических задач // *Наука и школа.* 2016. № 1. С. 47–53. URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25738425> (дата обращения: 29.05.2016).
3. *Степанов В. Г., Борисова А. И.* Зрительное восприятие и изобразительное искусство // *Педагогика и психология образования.* 2015. № 4. С. 100–108. URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25730842> (дата обращения: 03.03.2016).
4. *Байдалинова И. С.* Формирование культуры поведения младших школьников в условиях культурно-досуговой деятельности вокально-хоровой студии // *Наука и школа.* 2016. № 1. С. 92–101. URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25738431> (дата обращения: 23.05.2016).
5. *Айваз Е. Я.* Развитие и диагностирование музыкально-творческих способностей детей 6–9 лет в процессе групповых и индивидуальных занятий по специальности фортепиано // *Педагогика и психология образования.* 2015. № 4. С. 16–24. URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25730831> (дата обращения: 03.01.2016).
6. *Гудкова Л. А.* Анализ программ обучения игре на клавиатуре для детской музыкальной школы // *Педагогика и психология образования.* 2016. № 1. С. 25–31. URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=26426979> (дата обращения: 23.07.2015).
7. *Дмитриев Ю. А., Оралбекова А. К.* Подготовка учителей начальных классов Республики Казахстан к использованию информационных технологий в инклюзивном образовании // *Преподаватель XXI век.* 2016. № 1. С. 121–129. URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25730916> (дата обращения: 22.05.2016).
8. *Зилинских А. В.* Владение диагностическими технологиями как один из показателей исследовательской компетенции педагогов // *Исследователь.* 2014. № 1–2. С. 60–64. URL: <http://xn--c1arjr.xn--plai/wp-content/uploads/2015/03/2014-Issledovatel-Researcher----1-2.pdf> (дата обращения: 23.11.2015).
9. *Лушикова И. И.* Развитие дискурсивной компетенции студентов неязыковых факультетов в процессе обучения иностранному языку для общих целей: интегративно-дифференцированный подход // *Вестник МГГУ им. М. Шолохова. Серия «Педагогика и психология образования».* 2016. № 1. С. 47–52. URL: <http://mggu-sh.ru/vestnik/pedagogika-i-psihologiya-obrazovaniya-2016-no-1> (дата обращения: 22.05.2016).
10. *Каракозов С. Д., Уваров А. Ю.* Успешная информатизация=трансформация учебного процесса в цифровой образовательной среде // *Проблемы современного образования.* 2016. № 2. С. 7–19. URL: <http://www.pmedu.ru/index.php/ru> (дата обращения: 11.06.2016).
11. *Леванова Е. А., Пушкарева Т. В.* Методологические подходы к интериоризации профессионально-ориентированных знаний в процессе подготовки социальных педагогов // *Преподаватель XXI век.* 2015. № 4. С. 35–46. URL: <https://yadi.sk/i/qVkoBaLlqfziD> (дата обращения: 02.06.2016).
12. *Стулова Г. П.* К вопросу о певческом дыхании // *Наука и школа.* 2016. № 1. С. 78–82. URL: <https://yadi.sk/i/k5lpxVRBqg2DM> (дата обращения: 03.06.2016).
13. *Прокопец Т. Ю.* Реализация метапредметного подхода на хоровых занятиях детской хоровой школы // *Педагогика и психология образования.* 2015. № 3. С. 14–20. URL: http://tr.bsu.edu.ru/media/pedagogy/2015/4/%D0%90%D0%BD%D0%B8%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%A2%D0%98.pdf (дата обращения: 23.03.2016).
14. *Маковецкая Ю. Г.* Научно-прикладной проект как эффективная форма вовлечения педагогов в исследовательскую и проектную деятельность // *Исследователь.* 2014. № 1–2. С. 48–54. URL: <http://xn--c1arjr.xn--plai/wp-content/uploads/2015/03/2014-Issledovatel-Researcher----1-2.pdf> (дата обращения: 15.04.2015).
15. *Хилюк Е. А.* Особенности построения методики обучения математике основной школы в условиях предметной информационно-образовательной среды // *Проблемы современного образования.* 2016. № 2. С. 77–80. URL: <http://www.pmedu.ru/index.php/ru> (дата обращения: 10.06.2016).
16. *Левин Ю. И.* Симметрия и ее нарушение как композиционная основа стихотворения (Г. Иванов) // *Стилистика и поэтика. Тезисы Всесоюзной научной конференции. Вып. 1. М., 1989. С. 80–83.*

17. Read R. C. Combinatorial problems in the theory of music // Selected Papers 15th British Combinatorial Conference. Discrete Mathematics. V. 167–168, 15 April 1997. Pp. 543–551. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X96002555> (дата обращения: 23.05.2016).
18. Reiner D. L. Enumeration in music theory // The American Mathematical Monthly. V. 92. No. 1. (Jan., 1985). Pp. 51–54. URL: <http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28198501%2992%3A1%3C51%3AEIMT%3E2.0.CO%3B2-Q> (дата обращения: 14.06.2016).
19. Shepard R. N. Geometric approximations to the structure of musical pitch // Psychological Review. Vol. 89 (4). Jul 1982. Pp. 305–333. URL: <http://dx.doi.org/10.1037/0033-295X.89.4.305> (дата обращения: 30.05.2015).
20. Hodges W. The geometry of music // Dartmoor, November 2009. URL: <http://wilfridhodes.co.uk> (дата обращения: 12.06.2016).
21. John B. Little. Mathematics and music // MAA Northeast Sectional. Sacred Heart U. Fairfield, CT. November 18, 2006. URL: <http://mathcs.holycross.edu/~little/MAA2006.pdf> (дата обращения: 30.04.2016).
22. Paul B. Bilateral Keyboard Symmetry in the Music of Einojuhani Rautavaara [Электронный ресурс] // The Ohio State Online Music Journal. 2008. Vol. 1, No. 2. URL: <http://osomjournal.org/issues/1-2/paul/> (дата обращения: 11.04.2016).
23. Papadopoulos A. Mathematics and group theory in music // Cornell University Library [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/abs/1407.5757> (дата обращения: 23.04.2016).
24. Gareth E. Roberts. Composing with numbers: sir Peter Maxwell Davies and magic squares // Math, Music and Identity. Montserrat Seminar. March 23, 2015. Department of Mathematics and Computer Science College of the Holy Cross. URL: <http://mathcs.holycross.edu/~groberts/Courses/Mont2/Handouts/Lectures/Davies-web.pdf> (дата обращения: 22.03.2016).
25. Hunter, D. J., Hippel, H. T. How rare is symmetry in musical 12-tone rows? // The American Mathematical Monthly. 2003. Vol. 110, No. 2. P. 124–132. URL: <http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28200302%29110%3A2%3C124%3AHRISIM%3E2.0.CO%3B2-8> (дата обращения: 17.02.2016).
26. Певзнер В. В., Погорелов В. И., Шуклин Д. А. Некоторые особенности применения геймификации в процессе обучения // Проблемы современного образования. 2016. № 2. С. 98–101. URL: <http://www.rpmedu.ru/index.php/ru> (дата обращения: 04.06.2016).
27. Ушкова Н. В. Обучение бакалавров на творческих факультетах на основе интеграции художественно-графических и компьютерных навыков в едином тематическом задании «информационное сообщение» // Педагогика и психология образования. 2015. № 3. С. 52–57. URL http://tr.bsu.edu.ru/media/pedagogy/2015/4/%D0%90%D0%BD%D0%B8%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%A2%D0%98.pdf (дата обращения: 14.02.2016).

Поступила 08.09.2016; принята к публикации 10.10.2016; опубликована онлайн 30.12.2016.

Об авторе:

Бражникова Юлия Александровна, преподаватель фортепиано и музыкально-теоретических дисциплин МБУ ДО «Детская школа искусств г. Нерюнгри» (Россия, г. Нерюнгри, ул. Лужников, д. 3/2), кандидат искусствоведения, **ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6276-9729>**, iuna7@mail.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Aukhadeyev AE. Podgotovka spetsialistov na osnove sovremennykh predstavlenii o samoorganizatsii slozhnykh razvivayushchikhsya sistem [Training on the basis of modern concepts about self-organization of complex developing systems]. *Prepodavatel' XXI vek* = Teacher XXI century. 2016; 1:20-40. Available from: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25730906> (accessed: 02.06.2016). (In Russ.)
2. Shakirova LR, Falileyeva MV. Intellektualnyi vyzov pri obuchenii resheniyu matematicheskikh zadach [Intellectual challenge in teaching of solution of mathematical problems]. *Nauka i shkola* = Science and school. 2016; 1:47-53. Available from: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25738425> (accessed 29.05.2016). (In Russ.)
3. Stepanov VG, Borisova AI. Zritelnoye vospriyatiye i izobrazitelnoye iskusstvo [Visual perception and visual arts]. *Pedagogika i psikhologiya obrazovaniya* = Pedagogic and psychology of education. 2015; 4:100-108. Available from: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25730842> (accessed 03.03.2016). (In Russ.)



4. Baidalinova IS. Formirovaniye kultury povedeniya mladshikh shkolnikov v usloviyakh kulturno-dosugovoy deyatelnosti vokalno-khorovoy studii [Building a culture of behavior of younger schoolboys in the conditions of cultural and leisure activities of vocal and choral studio]. *Nauka i shkola* = Science and School. 2016; 1:92-101. Available from: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25738431> (accessed 23.05.2016). (In Russ.)
5. Aivaz EY. Razvitiye i diagnostirovaniye muzykalno-tvorcheskikh sposobnostei detei 6–9 let v protsesse gruppovykh i individualnykh zanyatii po spetsialnosti fortepiano [Development and diagnosing musical and creative abilities of children of 6-9 years in piano group and individual lessons]. *Pedagogika i psikhologiya obrazovaniya* = Pedagogic and psychology of education. 2015; 4:16-24. Available from: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25730831> (accessed 03.01.2016). (In Russ.)
6. Gudkova LA. Analiz programm obucheniya igre na klavesine dlya detskoj muzykalnoi shkoly [Analysis of playing harpsichord training programs for the children's music school]. *Vestnik MGGU im. Sholokhova. Seriya «Pedagogika i psikhologiya obrazovaniya»* = Moscow State Mining University named after Sholokhov Bulletin. "Pedagogy and Psychology of education" series. 2016; 1:25-31. Available from: <http://elibrary.ru/item.asp?id=26426979> (accessed 23.07.2015). (In Russ.)
7. Dmitriyev YuA, Oralbekova AK. Podgotovka uchiteley nachalnykh klassov Respubliki Kazakhstan k ispolzovaniyu informatsionnykh tekhnologii v inkluzivnom obrazovanii [Training primary school teachers of the Republic of Kazakhstan to the use of information technology in the inclusive education]. *Prepodavatel' XXI vek* = Teacher XXI century. 2016; 1:121-129. Available from: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25730916> (accessed 22.05.2016). (In Russ.)
8. Zilinskikh AV. Vladeniye diagnosticheskimi tekhnologiyami kak odin iz pokazateley issledovatel'skoy kompetentsii pedagogov [Possession diagnostic technologies as one of the indicators of the research competence of teachers]. *Issledovatel* = Researcher. 2014; 1-2:60-64. Available from: <http://xn--c1arjr.xn--p1ai/wp-content/uploads/2015/03/2014-Issledovatel-Researcher----1-2.pdf> (accessed: 23.11.2015). (In Russ.)
9. Lushnikova II. Razvitiye diskursivnoy kompetentsii studentov neyazykovykh fakultetov v protsesse obucheniya inostrannomu yazyku dlya obshchikh tseley: integrativno-differentsirovannyi podkhod [Development discursive competence of students of not-language faculties in the process of learning a foreign language for general purposes: integrative and differential treatment]. *Vestnik MGGU im. Sholokhova. Seriya «Pedagogika i psikhologiya obrazovaniya»* = Bulletin of Moscow State Mining University them. Sholokhov. "Pedagogy and Psychology of education" series. 2016; 1:47-52. Available from: <http://mgggu-sh.ru/vestnik/pedagogika-i-psihologiya-obrazovaniya-2016-no-1> (accessed 22.05.2016). (In Russ.)
10. Karakozov SD, Uvarov AY. Uspeshnaya informatizatsiya=transformatsiya uchebnogo protsessa v tsifrovoy obrazovatel'noy srede [Successful informatization=transformation of the educational process in the digital learning environment]. *Problemy sovremennogo obrazovaniya* = Problems of modern education. 2016; 2:7-19. Available from: <http://www.pmedu.ru/index.php/ru/> (accessed 11.06.2016). (In Russ.)
11. Levanova EA, Pushkareva TV. Metodologicheskiye podkhody k interiorizatsii professionalno-orientirovannykh znaniy v protsesse podgotovki sotsialnykh pedagogov [Methodological approaches to the internalization of professionally-oriented knowledge in the preparation of social teachers]. *Prepodavatel' XXI vek* = Teacher XXI century. 2015; 4:35-46. Available from: <https://yadi.sk/i/qBko6aLIqfziD> (accessed 02.06.2016). (In Russ.)
12. Stulova GP. K voprosu o pevcheskom dykhanii [The question of singing breathing]. *Nauka i shkola* = Science and School. 2016; 1:78-82. Available from: <https://yadi.sk/i/k5lpxVRBqg2DM> (accessed 03.06.2016). (In Russ.)
13. Prokopets TYu. Realizatsiya metapredmetnogo podkhoda na khorovykh zanyatiyakh detskoy khoro-voy shkoly [Implementation metasubject approach to choral classes in children's choir school]. *Pedagogika i psikhologiya obrazovaniya* = Pedagogic and psychology of education. 2015; 3:14-20. Available from http://rr.bsu.edu.ru/media/pedagogy/2015/4/%D0%90%D0%BD%D0%B8%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%A2%D0%98.pdf (accessed 23.03.2016). (In Russ.)
14. Makovetskaya YG. Nauchno-prikladnoy proekt kak effektivnaya forma вовлечeniya pedagogov v issledovatel'skuyu i proektnuyu deyatel'nost' [Scientific and applied project as an effective form of teachers' involvement in the research and design activity]. *Issledovatel* = Researcher. 2014; 1-2:48-54. Available from: <http://xn--c1arjr.xn--p1ai/wp-content/uploads/2015/03/2014-Issledovatel-Researcher----1-2.pdf> (accessed 15.04.2015). (In Russ.)
15. Khilyuk EA. Osobennosti postroeniya metodiki obucheniya matematike osnovnoy shkoly v usloviyakh predmetnoy informatsionno-obrazovatel'noy srede [Features of construction methods of teaching mathematics of the basic school in the conditions of the subject information and educational environment]. *Problemy sovremennogo obrazovaniya* = Problems of modern education. 2016; 2:77-80. Available from: <http://www.pmedu.ru/index.php/ru> (accessed 10.06.2016). (In Russ.)

16. Levin YuI. Simmetriya i ee narusheniye kak kompozitsionnaya osnova stikhotvoreniya (G Ivanov) [Symmetry and its violation as a compositional basis of the poem (G Ivanov)]. *Stilistika i poetika. Tezisy Vsesoyuznoi nauchnoi konferentsii* = Stylistics and Poetics. Abstracts of All-Union Scientific Conference. Moscow; 1989; 1:80-83.
17. Read RC. Combinatorial problems in the theory of music. Selected Papers 15th British Combinatorial Conference. *Discrete Mathematics*. 1997; 167-168:543-551. Available from: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X96002555> (accessed 23.05.2016).
18. Reiner DL. Enumeration in music theory. *The American mathematical monthly*. 1985; 92(1):51-54. Available from: <http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28198501%2992%3A1%3C51%3AEIMT%3E2.0.CO%3B2-Q> (accessed 14.06.2016).
19. Shepard RN. Geometric approximations to the structure of musical pitch. *Psychological Review*. 1982; 89(4):305-333. Available from: <http://dx.doi.org/10.1037/0033-295X.89.4.305> (accessed 30.05.2015).
20. Hodges W. *The geometry of music*. Dartmoor; 2009. Available from: <http://wilfridhodges.co.uk> (accessed 12.06.2016).
- 21 John B. Little. *Mathematics and music*. MAA Northeast Sectional. Sacred Heart U. Fairfield, CT. 2006. Available from: <http://mathcs.holycross.edu/~little/MAA2006.pdf> (accessed 30.04.2016).
22. Paul B. Bilateral keyboard symmetry in the music of einojuhani rautavaara. *The Ohio State Online Music Journal*. 2008; 2(1). [Electronic resource]. Available from: <http://osomjournal.org/issues/1-2/paul> (accessed 11.04.2016).
23. Papadopoulos A. *Mathematics and group theory in music*. Cornell University Library [Electronic resource]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1407.5757> (accessed 23.04.2016).
24. Gareth E. Roberts. *Composing with Numbers: Sir Peter Maxwell Davies and Magic Squares*. Math, Music and Identity. Montserrat Seminar. 2015; Department of Mathematics and Computer Science College of the Holy Cross. Available from: <http://mathcs.holycross.edu/~groberts/Courses/Mont2/Handouts/Lectures/Davies-web.pdf> (accessed 22.03.2016).
25. Hunter DJ, Hippel HT. How Rare is Symmetry in Musical 12-tone Rows? *The American Mathematical Monthly*. 2003; 110(2):124-132. Available from: <http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890%28200302%29110%3A2%3C124%3AHRISIM%3E2.0.CO%3B2-8> (accessed 17.02.2016).
26. Pevzner VV, Pogorelov VI, Shuklin DA. Nekotorye osobennosti primeneniya geimifikatsii v protsesse obucheniya [Some features of the application of game-making in the learning process]. *Problemy sovremennogo obrazovaniya* = Problems of modern education. 2016; 2:98-101. Available from: <http://www.pmedu.ru/index.php/ru> (accessed 04.06.2016).
27. Ushkova NV. Obucheniye bakalavrov na tvorcheskikh fakultetakh na osnove integratsii khudozhestvenno-graficheskikh i kompyuternykh navykov v edinom tematicheskom zadanii «informatsionnoye soobshcheniye» [Bachelors training on the creative faculties based on the integration of art-graphic and computer skills in a single thematic task “data message”]. *Pedagogika i psikhologiya obrazovaniya* = Pedagogy and psychology of educational. 2015; 3:52-57. Available from http://rr.bsu.edu.ru/media/pedagogy/2015/4/%D0%90%D0%BD%D0%B8%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%A2%D0%98.pdf (accessed 14.02.2016).

Submitted 08.09.2016; revised 10.10.2016; published online 30.12.2016.

About the author:

Yuliya A. Brazhnikova, teacher of piano, music and music theory at children’s teacher of Children's Art School Neryungry (3/2, Luzhniky St., Neryungry, Russia), **ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6276-9729>**, iuna7@mail.ru

The author have read and approved the final manuscript.